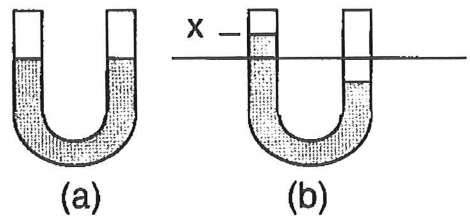
Tentamen Mechanica, 1 februari 2007, 13.00-16.00 uur
Maak elke opgave op een apart vel
Schrijf je naam en studentnummer op elk vel
Cijfer = Σ(punten)/3

Opgave 1: Oscillaties in een U-buis



Beschouw een U-buis met twee open benen waarin een vloeistof met dichtheid ρ staat (Figuur a). De oppervlakte van de doorsnede van de buis is A; het totale volume aan vloeistof is V. De benen van de U-buis staan verticaal, de zwaartekracht is verticaal naar onder gericht. In evenwicht staat de vloeistof in beide benen even hoog. Als we, bijvoorbeeld door blazen, de vloeistof in één van de benen hoger brengen dan in het andere (Figuur b), zal (als we ophouden met blazen) een oscillatie ontstaan van de vloeistofspiegel in elk der benen. In eerste instantie verwaarlozen we wrijving.

2p a) Druk de potentiële energie van de vloeistof uit in termen van de zwaartekrachtsversnelling g, de bovengegeven grootheden en de uitwijking x uit de evenwichtstand.

2p b) Druk de kinetische energie uit in termen van de gegeven grootheden en dx/dt.

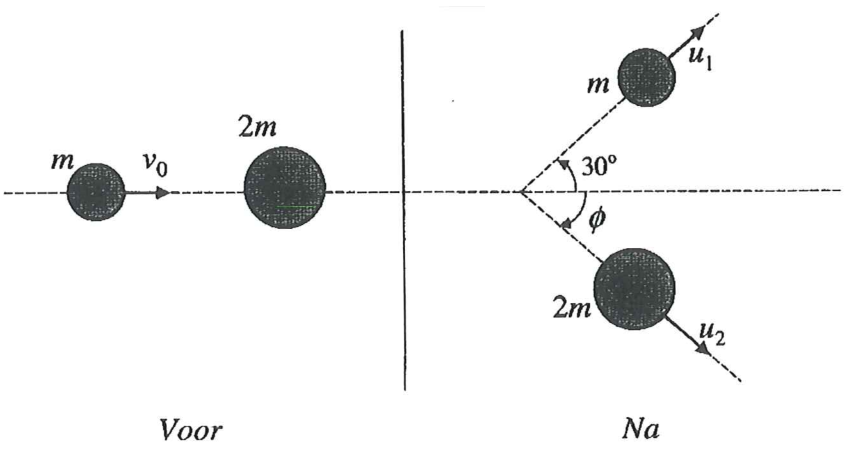
3p c) Laat zien dat uit energiebehoud volgt dat de grootheid x een harmonische oscillatie uitvoert. Geef de natuurlijke frekwentie ω_0 van deze oscillatie.

Neem nu aan dat we de buis periodiek aanblazen volgens een sinus-functie met een frekwentie ω.

2p d) Schets in een grafiek hoe de amplitudo van de resulterende oscillatie afhangt van ω. Doe dit ook voor het faseverschil van de oscillatie met de aandrijving. Laat in beide grafieken duidelijk zien waar ω_0 ligt langs de horizontale as.

1p e) Laat ook zien hoe de figuren veranderen als we wrijving (viscositeit) meenemen.

Opgave 2: Elastische botsing



Biljartbal 1 met massa m botst met een snelheid v_0 tegen een stilliggende biljartbal 2 met massa $2m$ (gezien vanuit het laboratorium stelsel). Na de botsing heeft biljartbal 1 een snelheid u_1 en maakt een hoek van 30° met de oorspronkelijke bewegingsrichting. Biljartbal 2 heeft een snelheid u_2 en maakt een hoek ϕ met de oorspronkelijke bewegingsrichting. De botsing kan als puur elastisch worden verondersteld.

2p a) Welke behoudswetten gelden er? Schrijf ze uit in termen van m, v_0, u_1, u_2 en ϕ.

4p b) Bepaal u_1 en u_2 als functie van v_0.

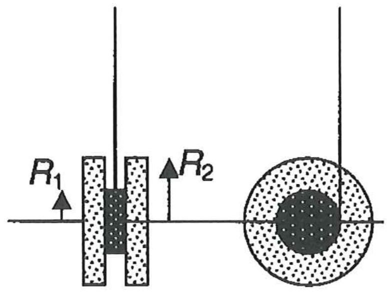
1p c) Bepaal ϕ.

1p d) Bepaal de snelheid van het zwaartepunt van het syteem van de twee biljartballen.

2p e) Bepaal de hoek die biljartbal 1 maakt met de oorspronkelijke bewegingsrichting gemeten in het zwaartepuntstelsel.

Opgave 3: Jojo

Een jojo bestaat uit een kleine cylinder, met straal R_1 en massa m_1, begrensd door twee grotere cylinders, elk met straal R_2 en massa m_2 (zie figuur voor voor- en zij-aanzicht). De cylinders hebben een uniforme dichtheid en hebben dezelfde as. Om de kleine cylinder zit een koord gewikkeld, waarlangs de jojo naar beneden rolt. Neem aan dat het koord geen massa heeft en dat de rol slipvrij is. Het afgerolde deel van het koord is steeds verticaal gericht, evenwijdig aan de zwaartekrachtsversnelling g.



2p a) Wat is het relevante traagheidsmoment in dit probleem? (De gyratiestraal voor een enkele uniforme cylinder met straal R is $R/\sqrt{2}$.)

1p b) Geef aan welke krachten op de jojo werken en waar ze aangrijpen.

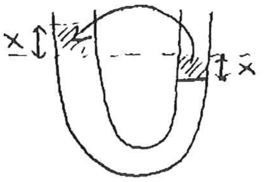
2p c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de versnelling en de hoekversnelling.

3p d) Vindt uit de bewegingsvergelijkingen de positie en hoeksnelheid van de jojo als functie van de tijd na het moment waarop de valbeweging begint.

2p e) Op een bepaald moment is het koord geheel afgerold, waarna het weer begint op te rollen en de jojo weer naar boven gaat. Neem aan dat bij het "terugstuiten" tegen het einde van het koord 10% van de energie verloren gaat. Druk de maximale hoogte waarop de jojo terugkomt uit in de totale lengte L van het koord. Hoe vaak gaat de jojo op en neer voor de hoogte is gereduceerd tot $0.1L$?

Mechanica, 1 febr. 2007. opgave 1.

a) Neem $V=0$ in evenwicht.
Als de uitwijking x is, betekent dat dat (per saldo) een volume ter grootte van $x \cdot A$ over een hoogte x naar boven is verplaatst.



De potentiële energie die hiermee gewonnen wordt is: $\underbrace{m}_{\text{massa verplaatste vloeistofelement}} g x = \rho (x \cdot A) g x = \rho A g x^2$.

b) $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$, M: de totale massa in de buis.

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \rho V \dot{x}^2$

c) Geen wrijving $\Rightarrow$ $E = T + V = \text{cst.}$

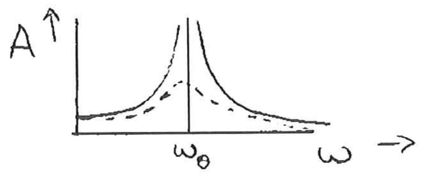
$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho V \dot{x}^2 + \rho A g x^2 = \text{cst.}$

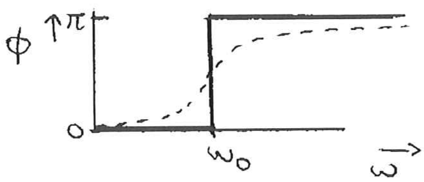
Neem tijdafgeleide $\Rightarrow \frac{1}{2} \rho V 2 \dot{x}\ddot{x} + \rho A g \, 2 x \dot{x} = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2Ag}{V} x = 0$

Dit is de vgl voor een harmonische oscillator, met eigenfrekwentie: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2Ag}{V}}$

d)





— : geen wrijving

- - - : wrijving

e) Wrijving → discontinue karakter verdwijnt, amplitude neemt af, peak in A bij $\omega < \omega_0$; ϕ gaat door $\frac{\pi}{2}$ bij ω_0. (zie stippellijn boven)

Mechanica, 1 febr. 2007 opgave 2.

a) Impulsbehoud:

hor $\quad m v_0 = m u_1 \underbrace{\cos 30^\circ}_{=\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 2m\, u_2 \cos\phi \qquad (1)$

ver $\quad 0 = m u_1 \underbrace{\sin 30^\circ}_{=\frac{1}{2}} - 2m\, u_2 \sin\phi \qquad (2)$

Energie (elastisch):

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m u_1^2 + \tfrac{1}{2}(2m) u_2^2 \qquad (3)$$

b) $(1) \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, u_1 + 2u_2\cos\phi$

$(2) \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} u_1 - 2u_2 \sin\phi$

$$\Rightarrow 4u_2^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \left(v_0 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,u_1\right)^2 + \tfrac{1}{4}u_1^2$$

$$\Rightarrow 4u_2^2 = v_0^2 - v_0 u_1\sqrt{3} + \tfrac{3}{4}u_1^2 + \tfrac{1}{4}u_1^2$$

$$\Rightarrow 4u_2^2 = v_0^2 - v_0 u_1 \sqrt{3} + u_1^2 \qquad (a)$$

$(3) \Rightarrow \quad u_2^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}u_1^2$

of: $\quad 4u_2^2 = 2v_0^2 - 2u_1^2 \qquad (b)$

$(b) - (a) \Rightarrow \quad v_0^2 - 3u_1^2 + v_0 u_1 \sqrt{3} = 0$

of: $\quad 3u_1^2 - v_0 u_1\sqrt{3} - v_0^2 = 0$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{v_0\sqrt{3} \pm \sqrt{3v_0^2 + 12 v_0^2}}{6} = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,v_0 \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{15}\,v_0$$

$\Rightarrow$ − oplossing vervalt, omdat $u_1 > 0$ moet zijn.

$$\Rightarrow u_1 = \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}\right) v_0 \quad (\simeq 0{,}93\, v_0)$$

substitueer terug in (b) $\Rightarrow u_2^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{36}\left(3 + 15 + 2\sqrt{45}\right)v_0^2$

$$\Rightarrow u_2^2 = \tfrac{1}{2}v_0^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\sqrt{5}\right)v_0^2 = \tfrac{1}{4}v_0^2 - \tfrac{\sqrt{5}\,v_0^2}{12}$$

Mechanica, 1 febr. 2007 opgave 2, vervolg.

Dus: $$u_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{5}\right)^{1/2} v_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^{1/2} v_0 \simeq 0.25\, v_0$$

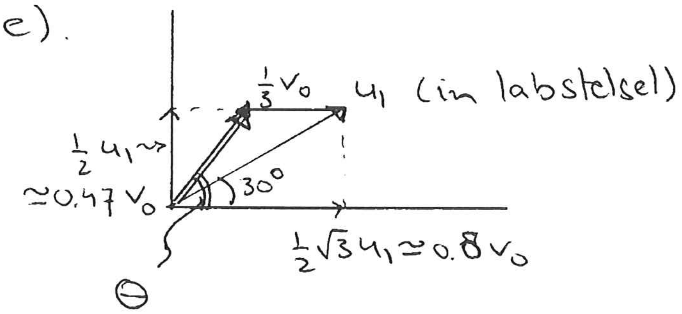
c) (2) $\Rightarrow$ $$\sin\phi = \frac{u_1}{4u_2} = \frac{\frac{1}{6}(\sqrt{3}+\sqrt{15})v_0}{4\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^{1/2} v_0} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^{1/2}}$$

$\Rightarrow \sin\phi \simeq 0{,}925$

$\phi \simeq 67{,}7^\circ$.

d) $$v_{cm} = \frac{m v_0}{3m} = \frac{1}{3} v_0,$$ gericht langs horizontale as.

e).



Hoek Θ in zwaartepuntsstelsel:

$$\tan\Theta = \frac{\frac{1}{2}u_1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,u_1 - \frac{1}{3}v_0} \simeq \frac{0{,}47 v_0}{0.81 v_0 - 0{,}33 v_0} = 0{,}98 \Rightarrow \Theta \simeq 44^\circ$$

Mechanica, 1 febr. 2007 opgave 3.

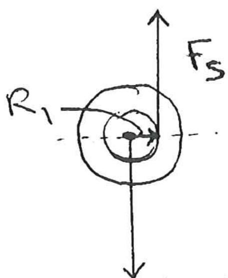
a) Relevante traagheidsmoment is som van traagheids-momenten van de 3 cylinders t.o.v. hun symmetrie-as. Voor één cylinder met straal R en massa m is

1 het traagheidsmoment: $I_{cyl} = mk^2 = m\frac{R^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} mR^2$

[mag ook uit het hoofd gereproduceerd worden].

1 Dus : $I = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2$.

b)



$F_s = ?$ spankracht in het koord. 1/2

Let op juiste aangrijppunten.

$x \downarrow$

$F_z = (m_1 + 2m_2)g$ zwaartekracht. 1/2

1 c) ① $m\ddot{x} = mg - F_s$ $\qquad$ x = positie zwaartepunt (= positie as)

$m = m_1 + 2m_2$.

1 ② $I\dot{\omega} = \underbrace{F_s R_1}_{\text{krachtmoment t.o.v. rotatie as}}$ $\qquad$ ω = hoeksnelheid; $\dot{\omega}$ = hoekversnelling

1 d) ① & ② $\Rightarrow$ $m\ddot{x} = mg - \frac{I\dot{\omega}}{R_1} = mg - \frac{I\ddot{x}}{R_1^2}$

sliprrij: $\dot{x} = \omega R_1$

1 $\Rightarrow (m + I/R_1^2)\ddot{x} = mg \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{mg}{m + I/R_1^2} t^2 = \frac{1}{2}\frac{mg\, t^2}{\frac{3}{2}m_1 + \left(2 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)m_2}$

(als op $t = 0$; $x = 0$, $\dot{x} = 0$).

1 $\Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{R_1} = \frac{1}{R_1}\frac{mg\,t}{\frac{3}{2}m_1 + \left(2 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)m_2}$

Mechanica, 1 febr, 2007 opgave 3 - vervolg.

e) Tijdens rollen gaat er geen mechanische energie verloren ⇒ kinetische energie vlak voor terugstuiten = potentiële energie verschil tussen start van valbeweging en terugstuitmoment.
Dit verschil is mgL.
Van deze kinetische energie gaat 10% verloren
⇒ $0{,}9\ mgL$ is over
⇒ jojo rolt weer omhoog tot op hoogte $0{,}9\,L$
1 boven laagste punt.

Dit herhaalt zich. De hoogte $0{,}1\,L$ wordt bereikt na n keer stuiten, met
1 $(0{,}9)^n = 0.1 \Rightarrow n = \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}9} = 21.85 \Rightarrow$ 22 keer

(ook via iteratie $0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9$ etc te vinden).